# จำนวน $b-$โครมาติคของกราฟวงแหวนนิรมิต


ปวีณา บุญมาพาด

สุทน ทิมจีน


การศึกษาอิสระ เสนอเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

หลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ธันวาคม 2559

มหาวิทยาลัยพะเยา

# จำนวน $b-$โครมาติคของกราฟวงแหวนนิรมิต

ปวีณา บุญมาพาด

สุทน ทิมจีน

การศึกษาอิสระ เสนอเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

หลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ธันวาคม 2559

มหาวิทยาลัยพะเยา

**คณะกรรมการสอบการศึกษาอิสระ อาจารย์ที่ปรึกษา และคณบดีคณะวิทยาศาสตร์ได้พิจารณาการศึกษาเรื่อง “จำนวน $b-$โครมาติคของกราฟวงแหวนนิรมิต” เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิตสาขาวิชาคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยพะเยา**

..........................................................................

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ประสิทธิ์ ช่อลำเจียก)

ประธานกรรมการ

..........................................................................

(นางสาวศรัณยา ฟองจันทร์)

กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา

..........................................................................

(นางสาวศิริลักษณ์ เผ่ากันทะ)

กรรมการ

..........................................................................

(รองศาสตราจารย์ปรียานันท์ แสนโภชน์)

คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

ธันวาคม 2559

# กิตติกรรมประกาศ

ในการศึกษาวิจัยครั้งนี้ ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณอาจารย์ที่ปรึกษาคือ อาจารย์ศรัณยา ฟองจันทร์ ในการแนะนำ ตรวจแก้ไข ให้ข้อเสนอแนะ ติดตามความก้าวหน้าในการดำเนินการวิจัย ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในความกรุณาของอาจารย์ท่านนี้เป็นอย่างยิ่ง ขอขอบคุณคณะกรรมการ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ประสิทธิ์ ช่อลำเจียก อาจารย์ศิริลักษณ์ เผ่ากันทะ และอาจารย์ศรัณยา ฟองจันทร์ ที่ได้เป็นกรรมการสอบการวิจัย ที่ได้กรุณาให้ข้อเสนอแนะแก้ไขและให้แนวคิดต่างๆที่เป็นประโยชน์ และเพื่อนๆในสาขาคณิตศาสตร์ที่ให้ความช่วยเหลือ ผู้วิจัยไม่สามารถกล่าวนามได้หมดในที่นี้ ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในความกรุณาและความปรารถนาดีของทุกท่านเป็นอย่างยิ่งจึงกราบขอบพระคุณและขอบคุณไว้ในโอกาสนี้

ปวีณา บุญมาพาด

สุทน ทิมจีน

**ชื่อเรื่อง** จำนวน $b-$โครมาติคของกราฟวงแหวนนิรมิต

**ผู้ศึกษาค้นคว้า** นางสาวปวีณา บุญมาพาด

นายสุทน ทิมจีน

**อาจารย์ที่ปรึกษา** นางสาวศรัณยา ฟองจันทร์

**วิทยาศาสตรบัณฑิต** สาขาวิชาคณิตศาสตร์

**คำสำคัญ** $b-$คัลเลอร์ริง $b-$เวอร์เทค จำนวน $b-$โครมาติค

## บทคัดย่อ

ในงานการศึกษาอิสระนี้คณะผู้วิจัยได้ศึกษาการระบายสีจุดของกราฟวงแหวนนิรมิต เพื่อหาจำนวน $b-$โครมาติคของกราฟดังกล่าว

| | |
|---|---|
| **Title** | THE $b-$CHROMATIC NUMBER OF MAGIC RING GRAPHS |
| **Author** | Miss Paweena Boonmapaed |
| | Mr. Suthon Thimjeen |
| **Advisor** | Miss Saranya Phongchan |
| **Bachelor of Science** | Program in Mathematics |
| **Keywords** | $b-$coloring, $b-$vertex, $b-$chromatic number |

## ABSTRACT

In this independent Study, we determine $b-$chromatic number of magic ring graphs.

# สารบัญ

# บทที่ 1

# บทนำและความรู้เบื้องต้น

## 1.1 บทนำ

ในงานวิจัยนี้เราได้ศึกษาการระบายสีจุดของกราฟ โดยเราเรียกกราฟดังกล่าวว่ากราฟวงแหวนนิรมิต (magic ring graphs) ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A_{m,n}$ เมื่อ $m$ และ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $m \geq 3$ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อหาจำนวน $b-$โครมาติค ของกราฟดังกล่าว

## 1.2 ความรู้เบื้องต้น

**บทนิยาม 1.2.1** กราฟ $G$ ประกอบด้วยเซตจำกัด 2 เซต คือ

1. เซตที่ไม่เป็นเซตว่างของจุดยอด $(Vertices)$ เขียนแทนด้วย $V(G)$
2. เซตของเส้นเชื่อม $(Edges)$ ที่เชื่อมระหว่างจุดยอด เขียนแทนด้วย $E(G)$

**ข้อสังเกต** $V(G)$ ต้องไม่เป็นเซตว่าง แต่ $E(G)$ อาจเป็นเซตว่างได้

**บทนิยาม 1.2.2** จุดยอด $u$ และจุดยอด $v$ ของกราฟ เป็นจุดยอดประชิด $(Adjacent\ Vertices)$ ก็ต่อเมื่อ มีเส้นเชื่อมระหว่างจุดทั้งสอง และเราเรียกจุดยอด $u$ และ $v$ ว่า จุดปลาย $(End\ Point)$ ของเส้นเชื่อมนั้น เส้นที่มีจุดปลายเป็นจุด $u$ และ $v$ เขียนแทนด้วย $uv$

**บทนิยาม 1.2.3** ถ้าจุด $u$ และ $v$ ของกราฟที่มีเส้น $uv$ เชื่อมแล้ว จะเรียก $u$ หรือ $v$ ว่าเป็นจุดที่อินซิเดนท์ $(Incident)$ กับเส้น $uv$

**บทนิยาม 1.2.4** มัลติเพิลเอดจ์ $(Multiple\ eage)$ คือเส้นที่มากกว่าหนึ่งเส้นซึ่งเชื่อมจุดคู่จุดเดียวกัน

**บทนิยาม 1.2.5** ลูป $(Loop)$ คือเส้นที่อยู่ในรูป $vv$

**บทนิยาม 1.2.6** ซิมเปิลกราฟ $(Simple\ graph)$ คือกราฟที่ไม่มีมัลติเพิลเอดจ์และไม่มีลูป

**บทนิยาม 1.2.7** ดีกรี $(Degree)$ ของจุดยอด $v$ ในกราฟ คือ จำนวนครั้งทั้งหมดที่เส้นเชื่อมเกิดกับจุดยอด $v$ เขียนแทนด้วย $d(v)$

**บทนิยาม 1.2.8** ให้ $G$ เป็นกราฟใดๆ $k-$คัลเลอร์ริง ( $k-coloring$ )ของกราฟ $G$ คือฟังก์ชัน $c: V(G) \to \{1,2,...,k\}$ โดยที่ $c(u) \neq c(v)$ ทุก $uv \in E(G)$

**บทนิยาม 1.2.9** ให้ $G$ เป็นกราฟใดๆ ถ้า $G$ มี $k-$คัลเลอร์ริง แล้วจะกล่าวว่า $G$ เป็น $k-$คัลเลอร์ราเบิล ($k-colorable$)

**บทนิยาม 1.2.10** ให้ $G$ เป็นกราฟใดๆและ $c:V(G)\to\{1,2,...,k\}$ เป็น $k-$คัลเลอร์ริง ของกราฟ $G$ กำหนดให้ ชั้นสีที่ $i$ เขียนแทนด้วย $c_i$ โดยที่ $c_i=\{v\in V(G)|c(v)=i\}$

**บทนิยาม 1.2.11** ให้ $G$ เป็นกราฟใดๆ $c:V(G)\to\{1,2,...,k\}$ เป็น $k-$คัลเลอร์ริง ของกราฟ $G$ และ $v\in c_i$ จะเรียกจุด $v$ ว่า $b-$เวอร์เทค ($b-vertex$) ถ้าทุกๆ $c_j$ ที่ $i\neq j$ มีจุด $v_j\in c_j$ ประชิดกับ $v$

**บทนิยาม 1.2.12** ให้ $G$ เป็นกราฟใดๆ $c:V(G)\to\{1,2,...,k\}$ เป็น $k-$คัลเลอร์ริง ของกราฟ $G$ จะกล่าวว่า $c$ เป็น $b-$คัลเลอร์ริง ($b-coloring$) ถ้าทุกๆชั้นสีของ $c$ บรรจุจุดซึ่งเป็น $b-$เวอร์เทค

**บทนิยาม 1.2.13** จำนวนโครมาติค $(Chromatic\ number)$ ของกราฟ $G$ เขียนแทนด้วย $\chi(G)$ คือ จำนวนเต็มบวก $k$ ที่เล็กที่สุด ที่กราฟ $G$ เป็น $k-$คัลเลอร์ราเบิล

**บทนิยาม 1.2.14** จำนวน $b-$โครมาติค $(b-chromatic\ number)$ ของกราฟ $G$ เขียนแทนด้วย $\varphi(G)$ คือ จำนวนเต็มบวก $k$ ที่ใหญ่ที่สุด ที่กราฟ $G$ ที่มี $k-$คัลเลอร์ริง ที่เป็น $b-$คัลเลอร์ริง

**บทนิยาม 1.2.15** $M-$ดีกรี $(M-degree)$ ของกราฟ $G$ เขียนแทนด้วย $M(G)$ คือ จำนวนเต็มบวก $r$ ที่ใหญ่ที่สุดที่กราฟ $G$ มี $r$ จุดที่มีดีกรีอย่างน้อย $r-1$

**ประพจน์ 1.2.16** ให้ $G$ เป็นกราฟใดๆ แล้ว $\chi(G)\le\varphi(G)\le M(G)$

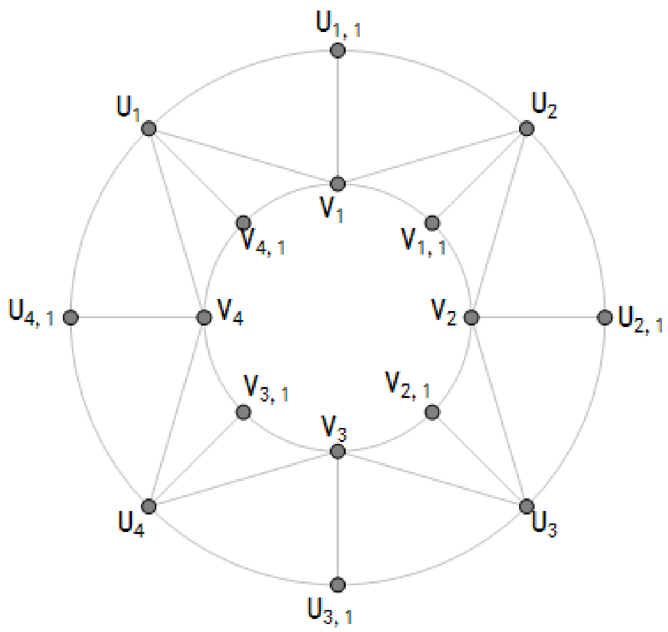
### 1.3 กราฟวงแหวนนิรมิต (*magic ring graphs*)

**บทนิยาม 1.3.1** ให้ $m$ และ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $m \geq 3$ กราฟวงแหวนนิรมิต เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A_{m,n}$ หมายถึง ซิมเปิลกราฟที่มี

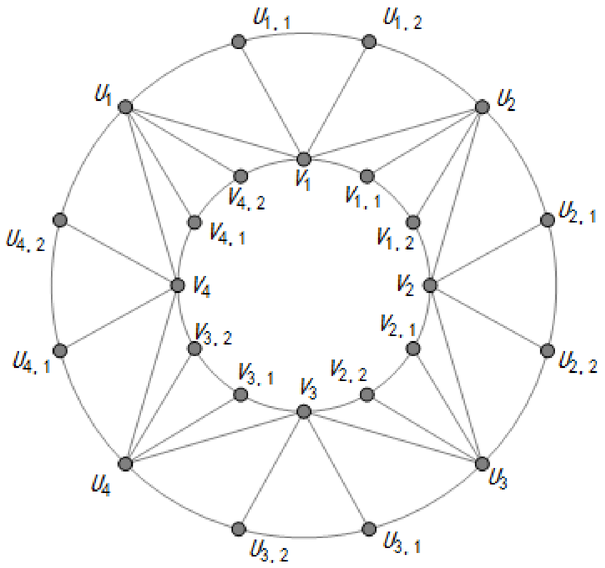
$$
\begin{aligned}
V(A_{m,n}) = &\{u_i \mid i=1,2,\dots,m\} \cup \{v_i \mid i=1,2,\dots,m\} \cup \\
&\{u_{i,j} \mid i=1,2,\dots,m\ ,\ j=1,2,\dots,n-1\} \cup \\
&\{v_{i,j} \mid i=1,2,\dots,m\ ,\ j=1,2,\dots,n-1\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(A_{m,n}) = &\{u_i v_i \mid i=1,2,\dots,m\} \cup \{v_i u_{i+1} \mid i=1,2,\dots,m-1\} \cup \{v_m, u_1\} \cup \\
&\{u_1 v_{m,j} \mid j=1,2,\dots,n-1\} \cup \{u_i v_{i-1,j} \mid i=2,3,\dots,m\ ,\ j=1,2,\dots,n-1\} \cup \\
&\{v_i u_{i,j} \mid i=1,2,\dots,m\ ,\ j=1,2,\dots,n-1\} \cup \{v_i, v_{i,1} \mid i=1,2,\dots,m\} \cup \\
&\{v_{i,j} v_{i,j+1} \mid i=1,2,\dots,m\ ,\ j=1,2,\dots,n-2\} \cup \{v_{i,n-1} v_{i+1} \mid i=1,2,\dots,m-1\} \cup \\
&\{v_{m,n-1} v_1\} \cup \{u_i v_{i,1} \mid i=1,2,\dots,m\} \cup \{u_{i,j} u_{i,j+1} \mid i=1,2,\dots,m\ ,\ j=1,2,\dots,n-2\} \cup \\
&\{u_{i,n-1} u_{i+1} \mid i=1,2,\dots,m-1\} \cup \{u_{m,n-1} u_1\}
\end{aligned}
$$

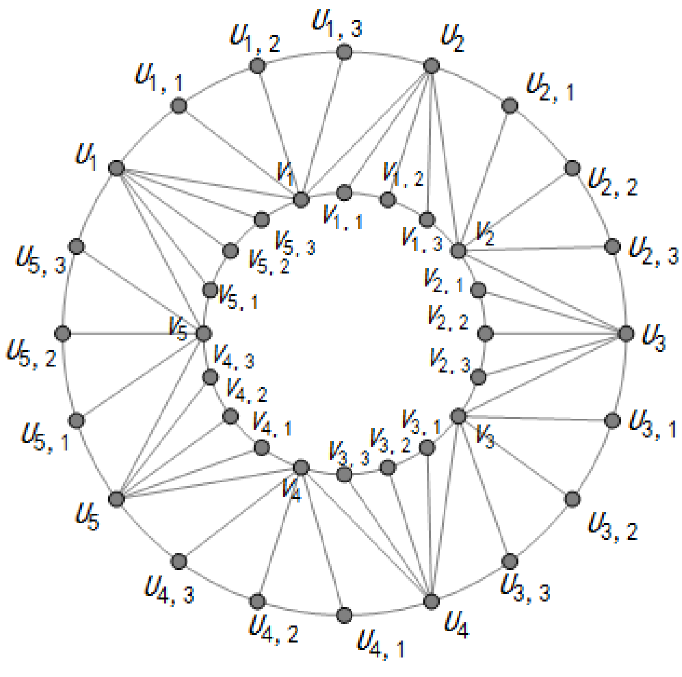
โดยที่ $i, j \in \mathbb{Z}$ □




รูป 1.1 กราฟ $A_{4,2}$




รูป 1.2 กราฟ $A_{4,3}$




รูป 1.3 กราฟ $A_{5,4}$

# บทที่ 2

# ผลการศึกษา

ในบทนี้จะกล่าวถึงการหาจำนวน $b-$โครมาติคของกราฟวงแหวนนิรมิต $A_{m,n}$

## 2.1 จำนวน $b-$โครมาติคของกราฟ $A_{m,1}$

**บทตั้ง 2.1.1** ให้ $m$ เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $m \geq 3$ แล้วจะได้ว่า

$\left|V\left(A_{m,1}\right)\right| = 2m$ และ $d\left(v\right) = 4$ สำหรับทุกๆ $v \in V\left(A_{m,1}\right)$

**พิสูจน์** จากการกำหนด $A_{m,n}$ เห็นได้ชัดว่ากราฟ $A_{m,1}$ ประกอบด้วยจุดจำนวน $2m$ จุด

คือ $u_i$ และ $v_i$ โดยที่ $i = 1, 2, \ldots, m$ และแต่ละจุดมีดีกรีเป็น 4 □

**บทตั้ง 2.1.2** $M\left(A_{m,1}\right) = 5$ สำหรับทุก $m \in \mathbb{Z}$ , $m \geq 3$

**พิสูจน์** จากบทตั้ง 2.1.1 ได้ว่า

กราฟ $A_{m,1}$ มี $2m$ จุด ที่มีดีกรีเป็น 4

เนื่องจาก $m \geq 3$

ดังนั้น $2m \geq 6$

จากบทนิยาม 1.2.15 ว่า

$M-$ดีกรี ของกราฟ $G$

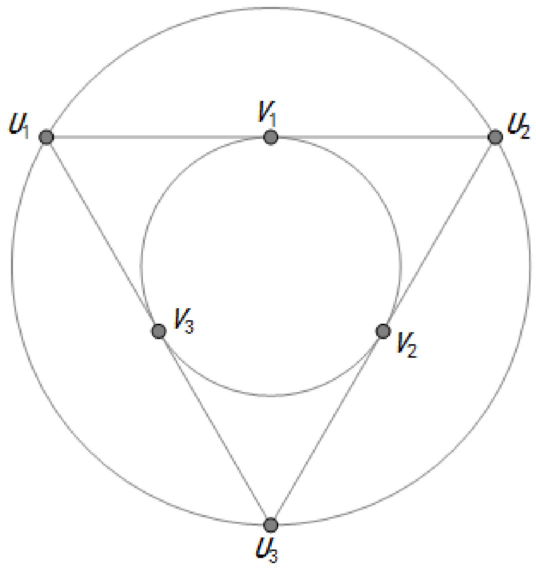
เขียนแทนด้วย $M(G)$ คือ จำนวนเต็ม $r$ ที่ใหญ่ที่สุด

ที่กราฟ $G$ มี $r$ จุด ที่มีดีกรีอย่างน้อย $r-1$

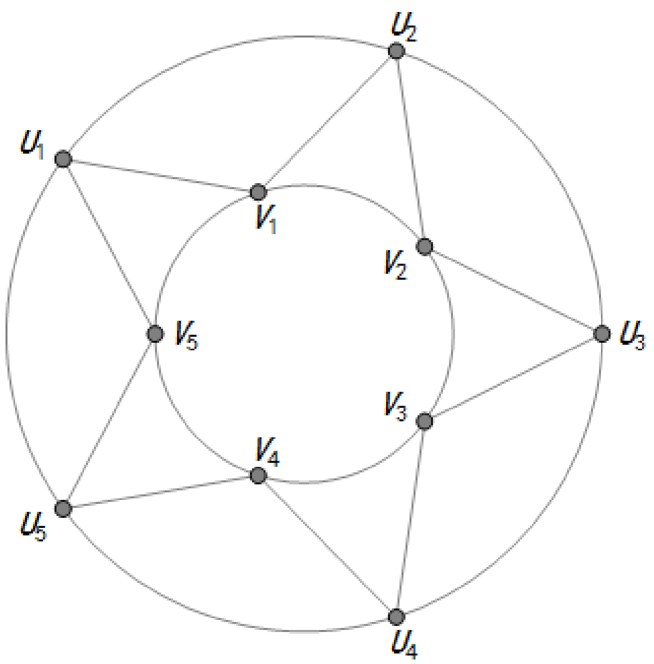
เพราะฉะนั้น 5 คือ จำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดของกราฟ $A_{m,1}$

ซึ่งมี $r = 5$ จุดที่มีดีกรีอย่างน้อย $r-1$

ดังนั้น $M\left(A_{m,1}\right) = 5$ สำหรับทุก $m \in \mathbb{Z}$ , $m \geq 3$ □



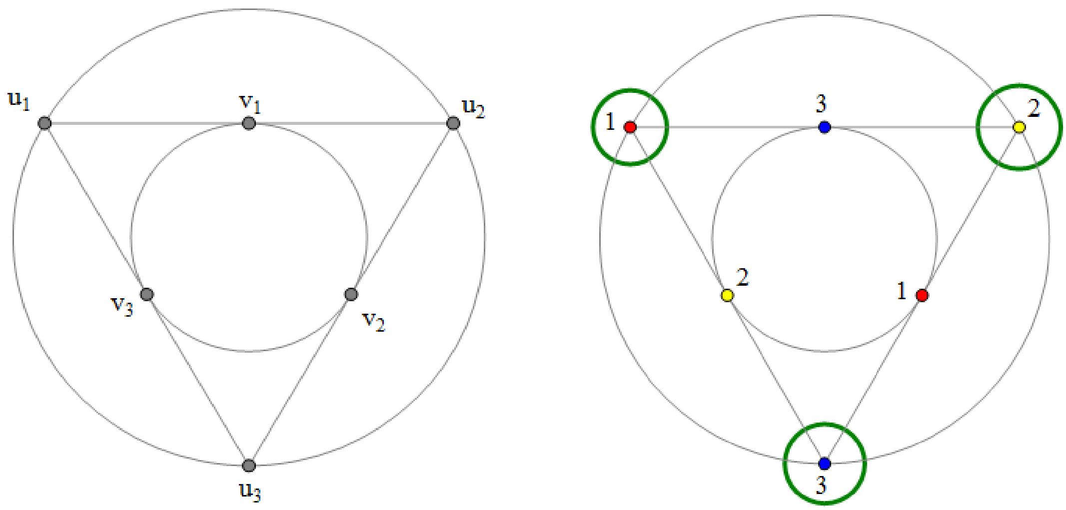

รูป 2.1 กราฟ $A_{3,1}$ ซึ่ง $M\left(A_{3,1}\right)=5$




รูป 2.2 กราฟ $A_{5,1}$ ซึ่ง $M\left(A_{5,1}\right)=5$

**ทฤษฎีบท 2.1.3** $\varphi(A_{m,1}) = m$ เมื่อ $m = 3, 4$

**พิสูจน์** พิจารณากราฟ $A_{3,1}$




รูป 2.3 แสดงการระบายสีจุด

ที่เป็น 3–คัลเลอร์ริงของ $A_{3,1}$ ซึ่งเป็น $b-$คัลเลอร์ริง

กำหนด $f : V(A_{3,1}) \to \{1,2,3\}$ โดย

$f(u_i) = i$ เมื่อ $i = 1,2,3$

$f(v_i) = i-1$ เมื่อ $i = 2,3$

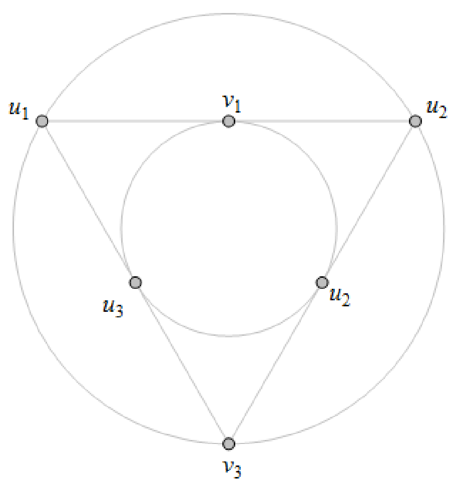
$f(v_1) = 3$

และจะเห็นว่า $u_1, u_2, u_3$ เป็น $b-$เวอร์เทค ของชั้นสีที่ 1,2,3 ตามลำดับ

ดังนั้น $f$ เป็น 3–คัลเลอร์ริง ที่เป็น $b-$คัลเลอร์ริง

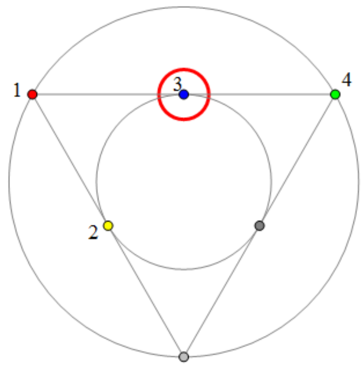
ต่อไปจะแสดงว่า ไม่มี 4–คัลเลอร์ริง และ 5–คัลเลอร์ริง ของกราฟ $A_{3,1}$ ที่เป็น $b-$คัลเลอร์ริง

พิจารณากราฟ $A_{3,1}$

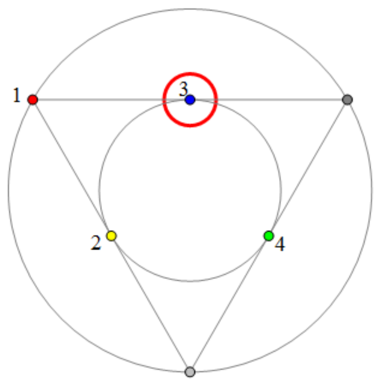



รูป 2.4

ถ้าให้ $v_1$ เป็น $b-$เวอร์เทคของชั้นสีที่ 3 จะต้องลงสีดังนี้




หรือ




รูป 2.5

รูป 2.6

พิจารณารูป 2.5

ถ้าต้องการให้จุด $u_1$ เป็น $b-$เวอร์เทค จะต้องลงสีจุด $u_3$ ด้วยสีที่ 4

แต่จุด $u_3$ ประชิดกับจุด $u_2$ ซึ่งลงด้วยสีที่ 4 แล้ว

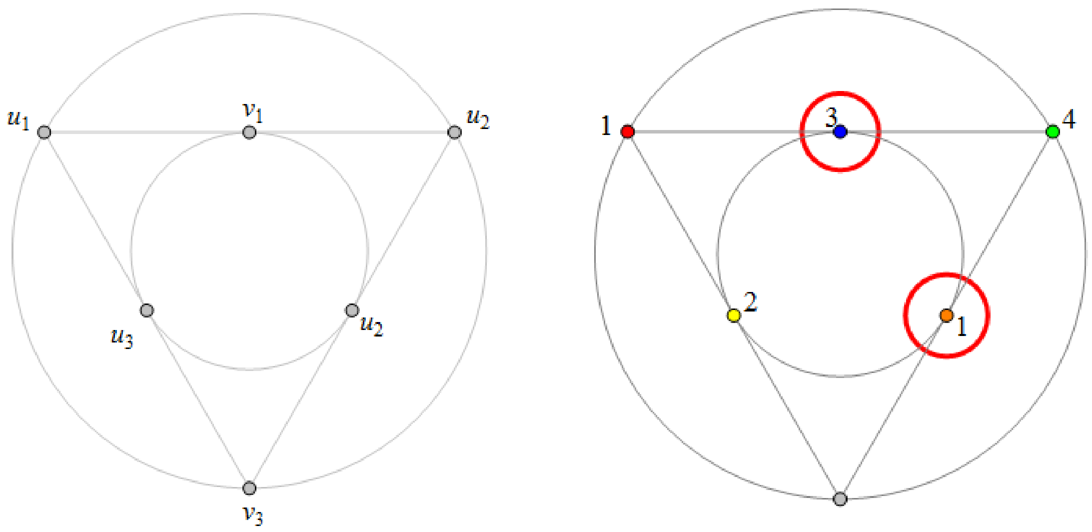
เพราะฉะนั้น ไม่สามารถลงสีจุด $u_3$ ด้วยสีที่ 4 ได้

ดังนั้นจุด $u_1$ ไม่สามารถเป็น $b-$เวอร์เทค ให้กับชั้นสีที่ 1 ได้

ได้ว่าจุด $u_3$ หรือจุด $v_2$ จะต้องเป็น $b-$เวอร์เทค ของชั้นสีที่ 1

แต่จุด $u_3$ ประชิดกับจุด $u_1$ จึงไม่สามารถลงสีจุด $u_3$ ด้วยสีที่ 1 ได้

ฉะนั้น $v_2$ จะต้องเป็น $b-$เวอร์เทค ของชั้นสีที่ 1

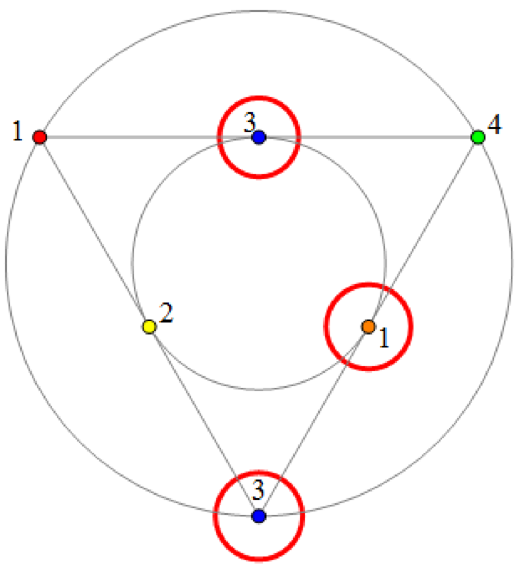



รูป 2.7

พิจารณารูป 2.7

จะเห็นว่าไม่สามารถลงสีจุด $u_3$ ด้วยสีที่ 1,2 หรือ 4 ได้

ดังนั้นจะต้องลงสีจุด $u_3$ ด้วยสีที่ 3 เท่านั้น




รูป 2.8

จากรูปที่ 2.8 จะเห็นว่าไม่มี $b-$เวอร์เทค ของชั้นสีที่ 2 และ 4

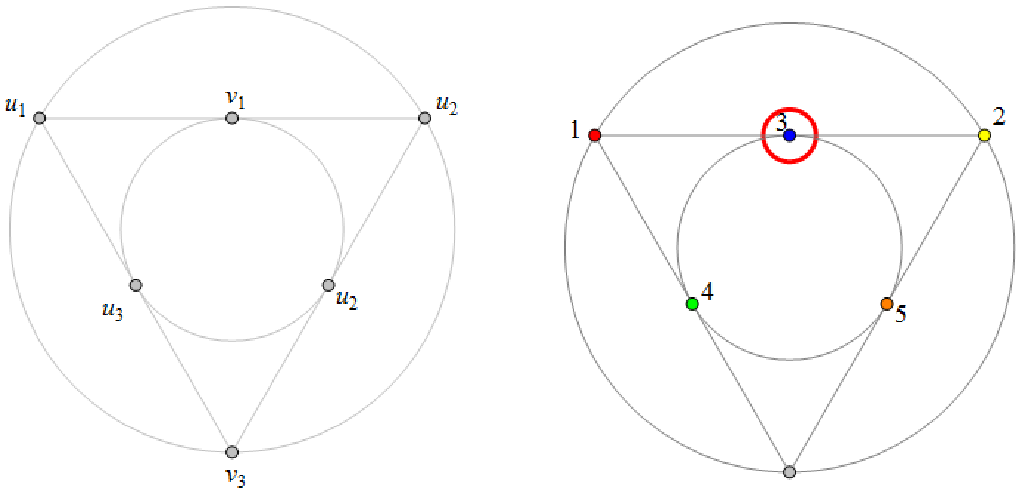
สำหรับกรณีที่ลงสีตามรูปที่ 2.6 ก็สามารถพิจารณาได้ในทำนองเดียวกันว่า

ไม่สามารถสร้าง 4–คัลเลอร์ริง ของกราฟ $A_{3,1}$ ที่ทุกชั้นสีมี $b-$เวอร์เทค ได้

ดังนั้น ไม่มี 4–คัลเลอร์ริง ของกราฟ $A_{3,1}$ ที่เป็น $b-$คัลเลอร์ริง

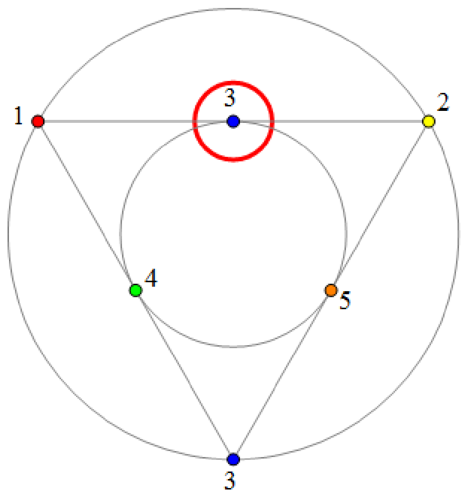
ต่อไปพิจารณา 5–คัลเลอร์ริง ของกราฟ $A_{3,1}$

ถ้าให้จุด $v_1$ เป็น $b-$เวอร์เทค ของชั้นสีที่ 3 จะต้องลงสีดังรูป




รูป 2.9

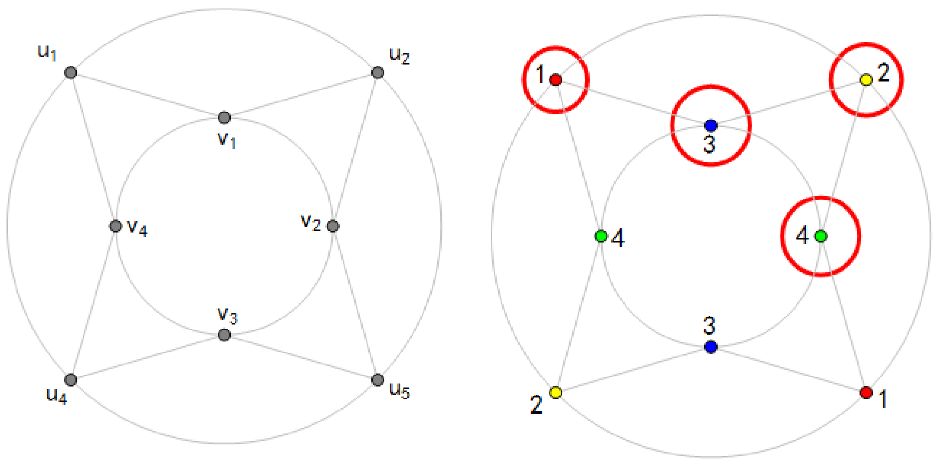
จากรูปที่ 2.9 จะเห็นว่าจุด $u_3$ สามารถลงสีด้วยสีที่ 3 เท่านั้น




รูป 2.10

จากรูปที่ 2.10 จะเห็นว่าไม่มี $b-$ เวอร์เทค ของชั้นสีที่ 1,2,4 และ 5
นั่นคือ ไม่มี $b-$ คัลเลอร์ริง ของกราฟ $A_{3,1}$ ที่เป็น เป็น $b-$ คัลเลอร์ริง
เนื่องจาก $M\left(A_{3,1}\right)=5$
และมี 3–คัลเลอร์ริง ที่เป็น เป็น $b-$ คัลเลอร์ริง
แต่ไม่มี 4–คัลเลอร์ริง และ 5–คัลเลอร์ริง ที่เป็น $b-$ คัลเลอร์ริง
ดังนั้น $\varphi\left(A_{3,1}\right)=3$ □

พิจารณากราฟ $A_{4,1}$




รูป 2.11 แสดงการระบายสีจุด
ที่เป็น 4–คัลเลอร์ริงของ $A_{4,1}$ ซึ่งเป็น $b-$คัลเลอร์ริง

กำหนด $f:V\left(A_{4,1}\right)\to\{1,2,3,4\}$ โดย

$$f\left(u_i\right)=\begin{cases}1\,;\, i\in O\ ,1\le i\le 4\\ 2\,;\, i\in E\ ,1\le i\le 4\end{cases}$$

$$f\left(v_i\right)=\begin{cases}3;\, i\in O\ ,1\le i\le 4\\ 4\,;\, i\in E\ ,1\le i\le 4\end{cases}$$

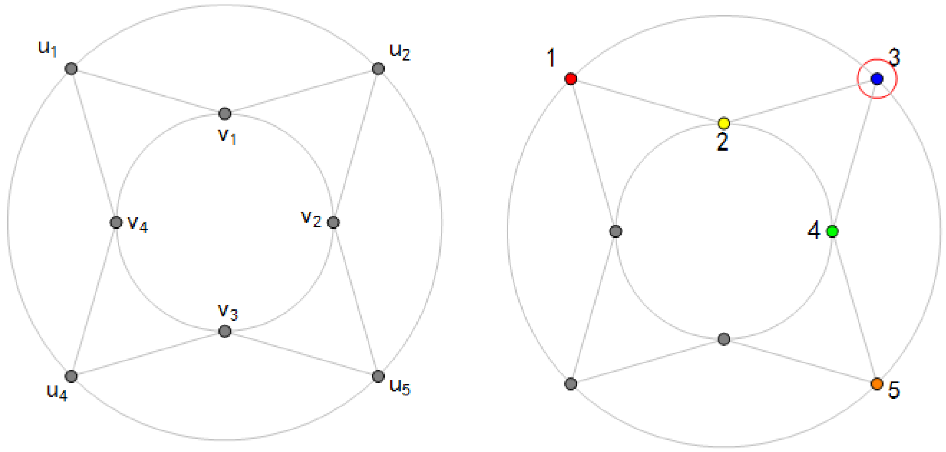
เมื่อ $O$ แทน เซตของจำนวนเต็มบวกคี่

และ $E$ แทน เซตของจำนวนเต็มบวกคู่

และจะเห็นว่า $u_1,u_2,v_1,v_2$ เป็น $b-$เวอร์เทค ของชั้นสีที่ 1,2,3,4 ตามลำดับ

ดังนั้น $f$ เป็น 4–คัลเลอร์ริง ที่เป็น $b-$คัลเลอร์ริง

ต่อไปจะแสดงว่า ไม่มี 5–คัลเลอร์ริง ของกราฟ $A_{4,1}$ ที่เป็น $b-$คัลเลอร์ริง




รูป 2.12

พิจารณารูปที่ 2.12

สมมติให้จุด $u_2$ เป็น $b-$เวอร์เทค ของชั้นสีที่ 3

จุดที่ประชิดกับ $u_2$ มีทั้งหมด 4 จุด คือ $u_1,v_1,v_2,u_3$ ตามลำดับ

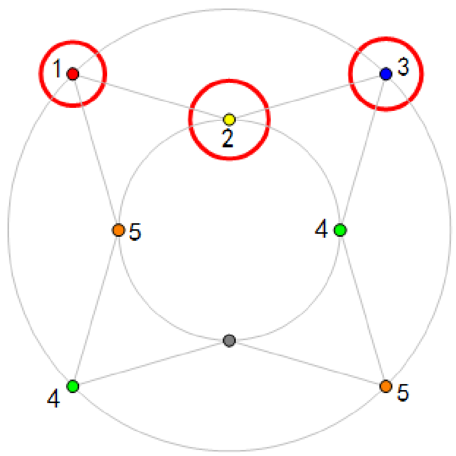
ดังนั้นจะลงสีที่ 1,2,4,5 ให้กับจุด $u_1,v_1,v_2,u_3$ ตามลำดับ

จะเห็นว่าจุด $u_4$ และจุด $v_4$ ไม่สามารถลงด้วยสีที่ 1 ได้

ดังนั้น $b-$เวอร์เทค ของชั้นสี่ที่ 1 อาจจะเป็นจุด $u_1$ หรือจุด $v_3$

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้าให้จุด $u_1$ เป็น $b-$เวอร์เทค ของชั้นสีที่ 1

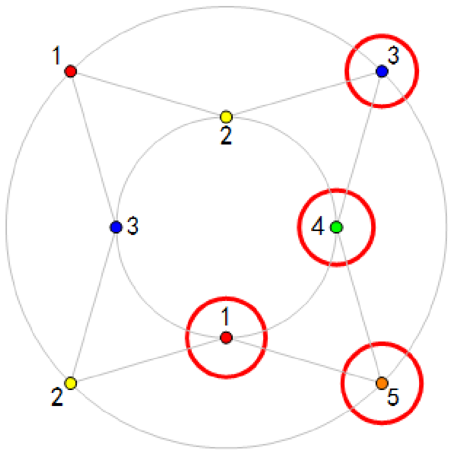
จะต้องลงสีจุด $u_4$ ด้วยสีที่ 4 และลงสีจุด $v_4$ ด้วยสีที่ 5 เท่านั้น




รูป 2.13

ซึ่งจากการระบายสีจุดตามรูปที่ 2.13 มีผลทำให้จุด $v_1$ เป็น $b-$เวอร์เทค ของชั้นสีที่ 2
และยังได้ว่าจุด $v_3$ สามารถลงสีด้วยสีที่ 1 หรือ 2 หรือ 3
ถ้าลงสีจุด $v_3$ ด้วยสีที่ 1 จะได้ว่าจุด $v_2$ เป็น $b-$เวอร์เทค ของชั้นสีที่ 4
แต่จะไม่มี $b-$เวอร์เทค ของชั้นสีที่ 5
ถ้าลงสีจุด $v_3$ ด้วยสีที่ 2 จะได้ว่าไม่มี $b-$เวอร์เทค ของชั้นสีที่ 4 และ 5
ถ้าลงสีจุด $v_3$ ด้วยสีที่ 3 จะได้ว่า $v_4$ เป็น $b-$เวอร์เทค ของชั้นสีที่ 5
แต่จะไม่มี $b-$เวอร์เทค ของชั้นสีที่ 4

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้าให้จุด $v_3$ เป็น $b-$เวอร์เทค ของชั้นสีที่ 1




รูป 2.14

จะได้ว่าต้องลงสีจุด $u_4$ ด้วยสีที่ 2 และจุด $v_4$ ด้วยสีที่ 3 เท่านั้น
มีผลทำให้จุด $v_2$ เป็น $b-$เวอร์เทค ของชั้นสีที่ 4
และจุด $u_3$ เป็น $b-$เวอร์เทค ของชั้นสีที่ 5
และจะไม่มี $b-$เวอร์เทค ของชั้นสีที่ 2
จึงสรุปได้ว่าไม่มี 5–คัลเลอร์ริง ของกราฟ $A_{4,1}$ ที่เป็น $b-$คัลเลอร์ริง
เนื่องจาก $M(A_{4,1})=5$
และกราฟ $A_{4,1}$ มี 4–คัลเลอร์ริง ที่เป็น $b-$คัลเลอร์ริง
แต่ไม่มี 5–คัลเลอร์ริง ที่เป็น $b-$คัลเลอร์ริง
ดังนั้น $\varphi(A_{4,1})=4$ □

**ทฤษฎีบท 2.1.4** $\varphi(A_{m,1})=5$ เมื่อ $m\in\mathbb{Z}$ , $m\geq 5$

**พิสูจน์** ให้ $m$ เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $m\geq 5$

จากบทตั้ง 2.1 เราได้ว่า $M(A_{m,1})=5$

และจากประพจน์ 1.2.16

จะได้ว่า $\varphi(A_{m,1})\leq M(A_{m,1})$

ดังนั้น $\varphi(A_{m,1})\leq 5$

ซึ่งเราสามารถกำหนดฟังก์ชันที่เป็น 5–คัลเลอร์ริง

และเป็น $b-$คัลเลอร์ริงของ $A_{m,1}$ ได้ดังนี้

ให้ $f:V(A_{m,1})\to\{1,2,3,4,5\}$ กำหนดโดย

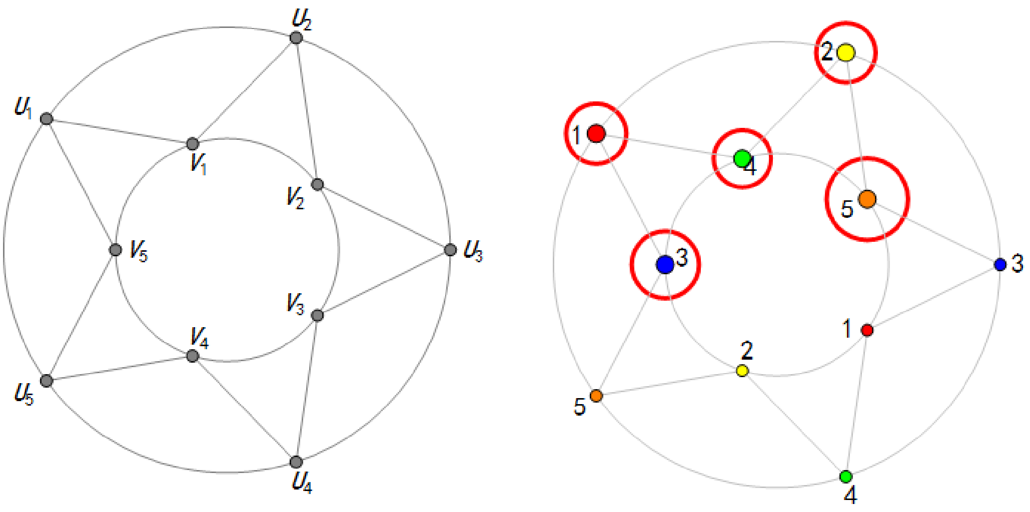
$$f(u_1)=1$$
$$f(u_2)=2$$
$$f(v_m)=3$$
$$f(v_1)=4$$
$$f(v_2)=5$$
$$f(u_m)=5$$
$$f(v_{m-1})=2$$
$$f(u_i)=\begin{cases}3\ ;\ i\in O,3\leq i\leq m-1\\ 4\ ;i\in E,3\leq i\leq m-1\end{cases}$$
$$f(v_i)=\begin{cases}1\ ;\ i\in O,\ 3\leq i\leq m-2\\ 5\ ;i\in E,\ 3\leq i\leq m-2\end{cases}$$

เมื่อ $O$ แทน เซตของจำนวนเต็มบวกคี่

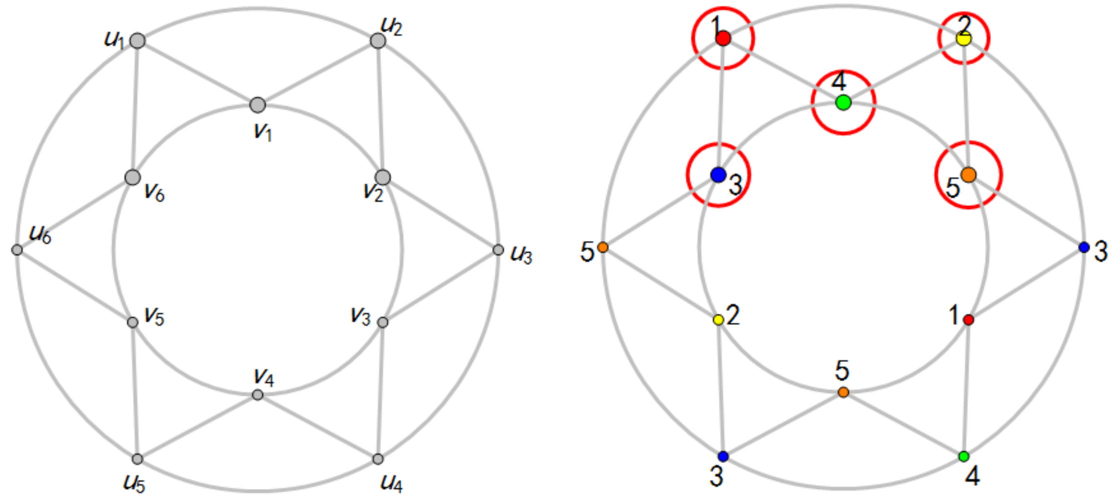
และ $E$ แทน เซตของจำนวนเต็มบวกคู่

จะเห็นได้ว่ามีจุด $u_1,u_2,v_m,v_1,v_2$ เป็น $b-$เวอร์เทค ของชั้นสีที่ 1 ถึง 5 ตามลำดับ

จึงสรุปได้ว่า $\varphi(A_{m,1})=5$ □




รูป 2.15 แสดงการระบายสีจุดที่เป็น $b$ – คัลเลอร์ริงของ $A_{5,1}$




รูป 2.16 แสดงการระบายสีจุดที่เป็น $b$ – คัลเลอร์ริงของ $A_{6,1}$

**2.2 จำนวน $b-$โครมาติคของกราฟ $A_{m,n}$ เมื่อ $n \geq 2m-4$**

**บทตั้ง 2.2.1** ให้ $m,n$ เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $m \geq 3$ , $n \geq 2$ จะได้ว่า
กราฟ $A_{m,n}$ ประกอบด้วย $2m$ จุด ที่มีดีกรีเป็น $n+3$ และ $2m(n-1)$ จุด ที่มีดีกรีเป็น 3

**พิสูจน์** เห็นได้ชัดว่ากราฟ $A_{m,n}$ มี $2mn$ จุด

ซึ่งจุด $u_i$ และ $v_i$ มีดีกรีเป็น $n+3$ สำหรับทุก $i=1,2,...,m$

และจุดอื่นๆที่เหลือมีดีกรีเป็น 3

ดังนั้นกราฟ $A_{m,n}$ ประกอบด้วย

จุดที่มีดีกรีเป็น $n+3$ จำนวน $2m$ จุด

และจุดที่มีดีกรีเป็น 3 จำนวน $2mn-2m=2m(n-1)$ จุด □

**บทตั้ง 2.2.2** ถ้า $n \geq 2m-4$ แล้ว $M\left(A_{m,n}\right)=2m$ สำหรับทุก $m,n \in \mathbb{Z}$ , $m \geq 3$

**พิสูจน์** จากบทตั้ง 2.2.1 ได้ว่ากราฟ $A_{m,n}$ ประกอบด้วย

$2m$ จุด ที่มีดีกรี $n+3$ และ $2m(n-1)$ จุด ที่มีดีกรีเป็น 3

จาก $n \geq 2m-4$ จะได้ว่า $n+3 \geq 2m-1$

และจาก $m \geq 3$ จะได้ว่า $n \geq 2$ และได้ว่า $2m(n-1) \geq 6 > 4$

ดังนั้นกราฟ $A_{m,n}$ มี $2m$ จุด ที่มีดีกรีอย่างน้อย $2m-1$

และมีมากกว่า 4 จุด ที่มีดีกรี 3

เนื่องจาก $2m \geq 6 > 4$

ดังนั้น $M\left(A_{m,n}\right)=2m$ □

**ทฤษฎีบท 2.2.3** ถ้า $n \geq 2m-4$ แล้ว $\varphi\left(A_{m,n}\right)=2m$ สำหรับทุก $m,n \in \mathbb{Z}$ , $m \geq 4$

**พิสูจน์** จากทฤษฎีบท 2.2.2

จะได้ว่า $M\left(A_{m,n}\right)=2m$

และจากบทแทรก 1.2.16

ได้ว่า $\varphi\left(A_{m,n}\right) \leq 2m$

ซึ่งสามารถสร้างฟังก์ชัน $f:V\left(A_{m,n}\right) \to \{1,2,...,2m\}$

ที่เป็น $2m-$ คัลเลอร์ริง และ $b-$ คัลเลอร์ริง ได้ดังนี้

**<u>กรณีที่ 1</u> เมื่อ $m$ เป็นจำนวนเต็มคู่**

กำหนด $f : V\left(A_{m,n}\right) \to \{1,2,\ldots,2m\}$ โดย

สำหรับแต่ละ $i \in \{1,2,\ldots,2m\}$ ให้

$$f\left(u_i\right) = 2i$$

$$f\left(v_i\right) = 2i \oplus 1$$

$$f\left(u_{i,1}\right) = 2i \oplus 3$$

$$f\left(v_{i.1}\right) = 2i \oplus 4$$

$$f\left(u_{i,n-1}\right) = 2i \oplus (2m-1)$$

$$f\left(v_{i,n-1}\right) = 2i$$

$$f\left(u_{i,j}\right) = 2i \oplus j \oplus 3 \qquad ;\ 2 \le j \le 2m-6$$

$$f\left(u_{i,j}\right) = \begin{cases} 2i \oplus (2m-2) & ;\ j \in O\ ,\ 2m-6 < j < n-1 \\ 2i \oplus 4 & ;\ j \in E\ ,\ 2m-6 < j < n-1 \end{cases}$$

$$f\left(v_{i,j}\right) = 2i \oplus j \oplus 4 \qquad ;\ 2 \le j \le 2m-6$$

$$f\left(v_{i,j}\right) = \begin{cases} 2i \oplus (2m-1) & ;\ j \in O\ ,\ 2m-6 < j < n-1 \\ 2i \oplus 5 & ;\ j \in E\ ,\ 2m-6 < j < n-1 \end{cases}$$

เมื่อ $\oplus$ คือการบวกมอดูโล $2m$

แล้ว $O$ แทน เซตของจำนวนเต็มบวกคี่

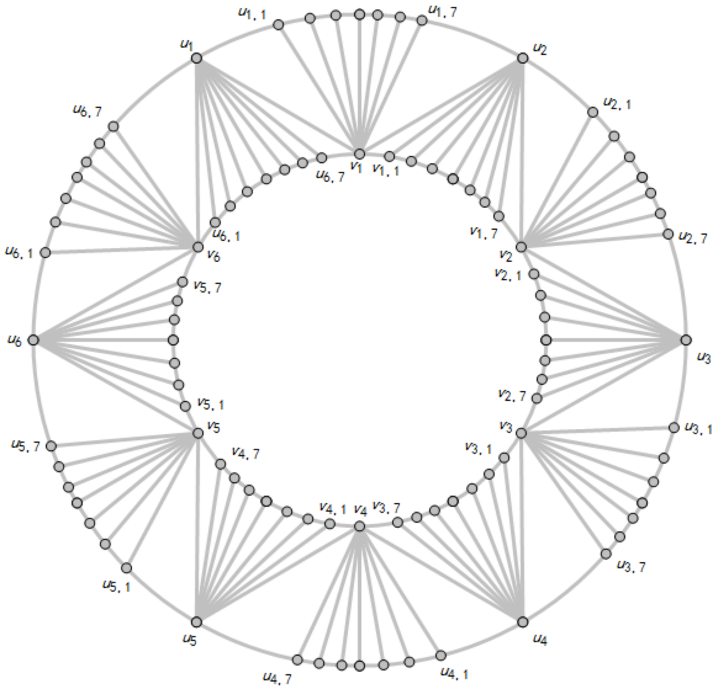
และ $E$ แทน เซตของจำนวนเต็มบวกคู่

จะได้ว่า $f$ เป็น $2m-$ คัลเลอร์ริง

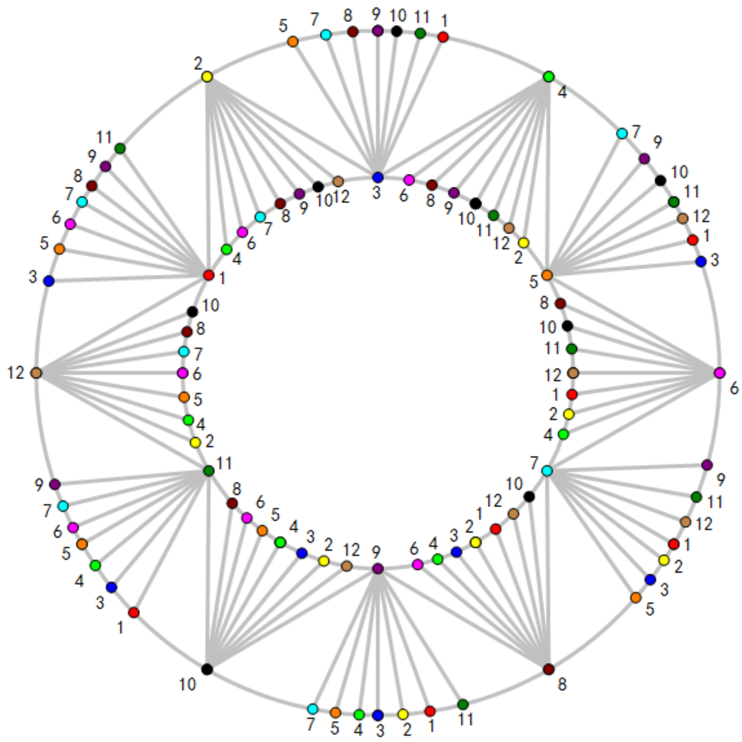
ซึ่งมี $v_m, u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_m$ เป็น $b-$ เวอร์เทค ของชั้นสีที่ $1,2,3,\ldots,2m$ ตามลำดับ

นั่นคือ $f$ เป็น $b-$ คัลเลอร์ริง

ดังนั้น $\varphi\left(A_{m,n}\right) = 2m$ เมื่อ $m$ เป็นจำนวนเต็มคู่




รูป 2.17 กราฟ $A_{6,8}$



รูป 2.18 ตัวอย่างการระบายสีจุดที่เป็น 12–คัลเลอร์ริง และเป็น $b$ – คัลเลอร์ริงของ $A_{6,8}$

**<u>กรณีที่ 2</u> เมื่อ $m$ เป็นจำนวนเต็มคี่**

กำหนด $f: V\left(A_{m,n}\right) \to \{1, 2, ..., 2m\}$ โดย

สำหรับแต่ละ $i \in \{1, 2, ..., 2m\}$ ให้

$$f\left(u_i\right) = 2i$$

$$f\left(v_i\right) = 2i \oplus 1$$

$$f\left(u_{i,1}\right) = 2i \oplus 4$$

$$f\left(v_{i,1}\right) = 2i \oplus 5$$

$$f\left(u_{i,2}\right) = 2i \oplus 3$$

$$f\left(v_{i,2}\right) = 2i \oplus 4$$

$$f\left(u_{i,n-1}\right) = 2i \oplus \left(2m-1\right)$$

$$f\left(v_{i,n-1}\right) = 2i$$

$$f\left(v_{i,j}\right) = 2i \oplus j \oplus 4 \qquad ;\ 3 \le j \le 2m-6$$

$$f\left(v_{i,j}\right) = \begin{cases} 2i \oplus \left(2m-1\right) & ;\ j \in O\ ,\ 2m-6 < j < n-1 \\ 2i \oplus 6 & ;\ j \in E\ ,\ 2m-6 < j < n-1 \end{cases}$$

$$f\left(u_{i,j}\right) = 2i \oplus j \oplus 3 \qquad ;\ 3 \le j \le 2m-6$$

$$f\left(u_{i,j}\right) = \begin{cases} 2i \oplus \left(2m-2\right) & ;\ j \in E\ ,\ 2m-6 < j < n-1 \\ 2i \oplus 5 & ;\ j \in O\ ,\ 2m-6 < j < n-1 \end{cases}$$

เมื่อ $\oplus$ คือการบวกมอดูโล $2m$

แล้ว $O$ แทน เซตของจำนวนเต็มบวกคี่

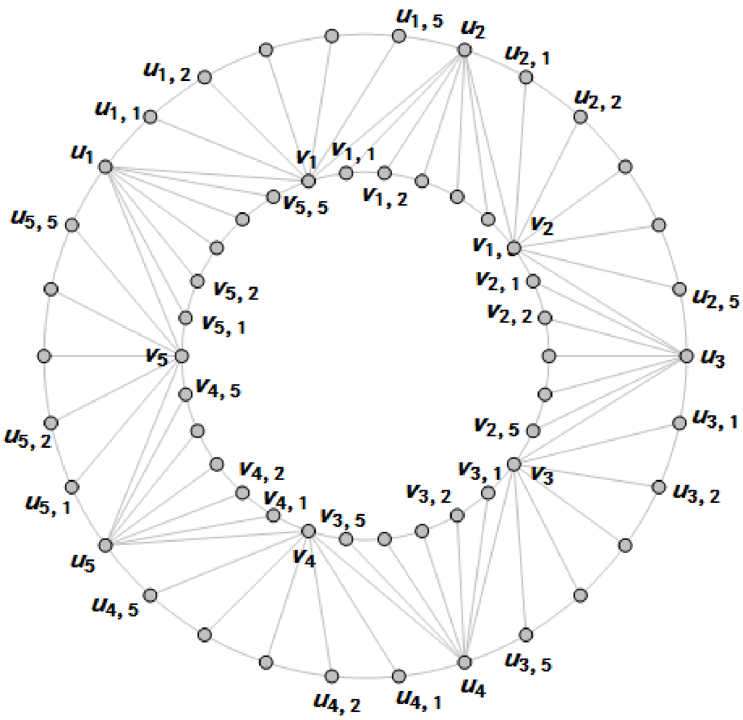
และ $E$ แทน เซตของจำนวนเต็มบวกคู่

จะได้ว่า $f$ เป็น $2m-$ คัลเลอร์ริง

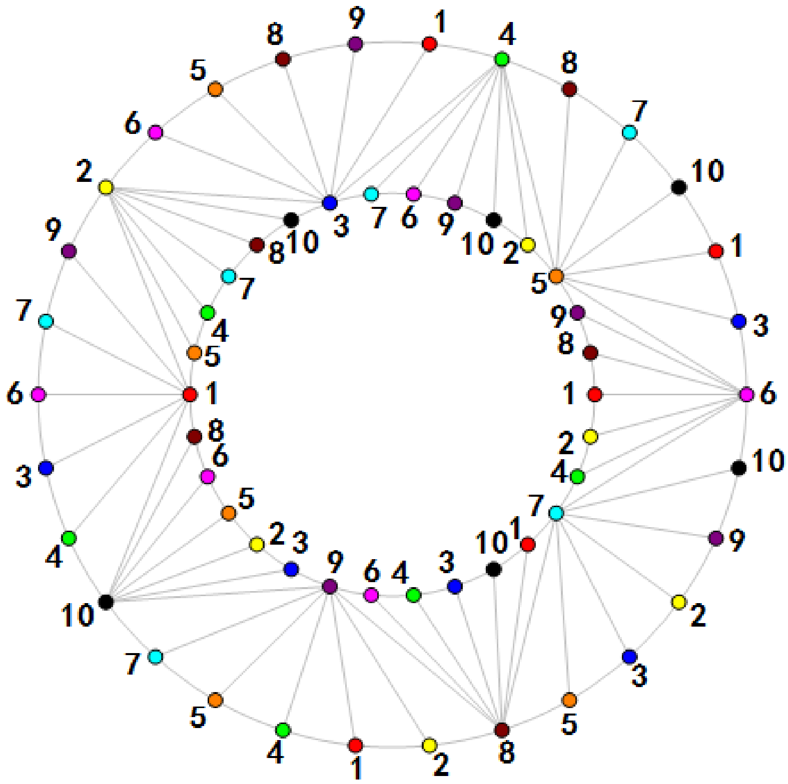
ซึ่งมี $v_m, u_1, v_1, u_2, v_2, ..., u_m$ เป็น $b-$ เวอร์เทค ของชั้นสีที่ $1, 2, 3, ..., 2m$

นั่นคือ $f$ เป็น $b-$ คัลเลอร์ริง

ดังนั้น $\varphi\left(A_{m,n}\right) = 2m$ เมื่อ $m$ เป็นจำนวนเต็มคี่ $\square$




รูป 2.19 กราฟ $A_{5,6}$

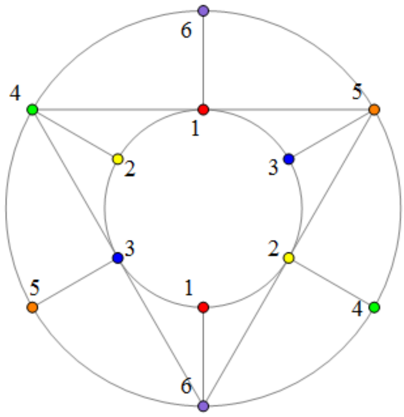


รูป 2.20 ตัวอย่างการระบายสีจุดที่เป็น 10–คัลเลอร์ริง และเป็น $b$ – คัลเลอร์ริงของ $A_{5,6}$

**ทฤษฎีบท 2.2.4** $\varphi(A_{3,n})=6$ สำหรับทุก $n\in\mathbb{Z}$ , $n\geq 2$

**กรณีที่** $n=2$

พิจารณากราฟ $A_{3,2}$




รูป 2.21 ตัวอย่าง 6–คัลเลอร์ริง ที่เป็น $b-$คัลเลอร์ริงของ $A_{3,2}$

กำหนดให้ $f:V(A_{3,2})\to\{1,2,3,4,5,6\}$ โดย

$f(u_i)=i+3\,;1\leq i\leq 3$

$f(v_i)=i\,;1\leq i\leq 3$

$$f(u_{i,1})=\begin{cases}6\,;\,i=1\\ i+2\,;\;2\leq i\leq 3\end{cases}$$

$$f(v_{i,1})=\begin{cases}3\;;\,i=1\\ i-1\,;2\leq i\leq 3\end{cases}$$

จะได้ว่า $f$ เป็น 6–คัลเลอร์ริง

ซึ่งมี $v_1,v_2,v_3,u_1,u_2,u_3$ เป็น $b-$เวอร์เทค ของชั้นสีที่ $1,2,3,4,5,6$

นั่นคือ $f$ เป็น $6-$คัลเลอร์ริง ที่เป็น $b-$คัลเลอร์ริง

ดังนั้น $\varphi(A_{m,n})=2m=6$

**กรณีที่** $n > 2$

เมื่อกำหนดฟังก์ชันตามกรณีที่ 2 ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.2.3

จะได้ข้อสรุปในทำนองเดียวกัน

นั่นคือ $A_{3,n}$ มี 6–คัลเลอร์ริง ที่เป็น $b-$คัลเลอร์ริง

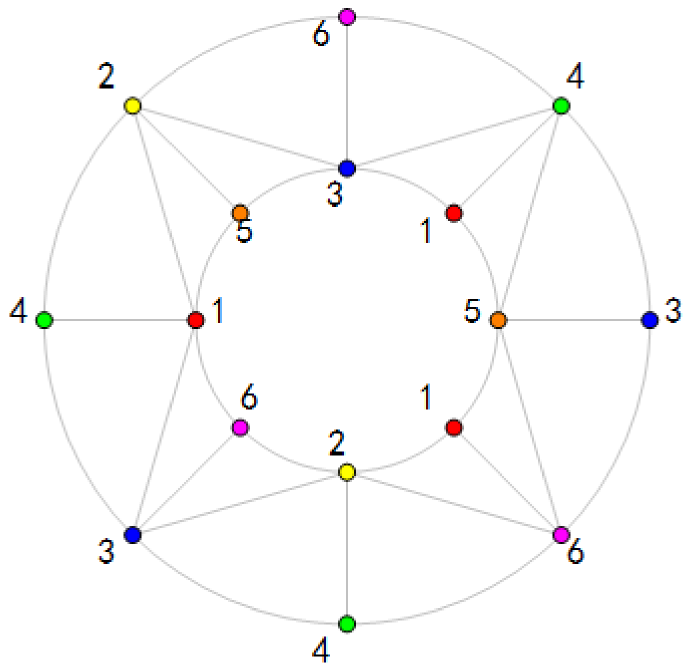
โดยที่มี $v_3, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3$ เป็น $b-$เวอร์เทค ของชั้นสีที่ 1,2,3,4,5,6 ตามลำดับ

จากทฤษฎีบท 2.2.2 ได้ว่า $M\left(A_{3,n}\right) = 6$

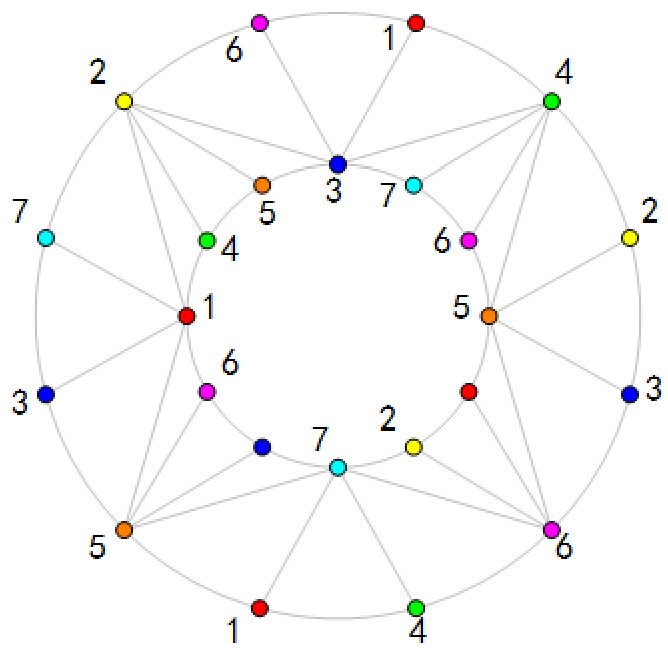
เพราะฉะนั้น $\varphi\left(A_{3,n}\right) = 6$ เมื่อ $n \geq 2$ $\square$

# ตารางสรุปผลการศึกษา

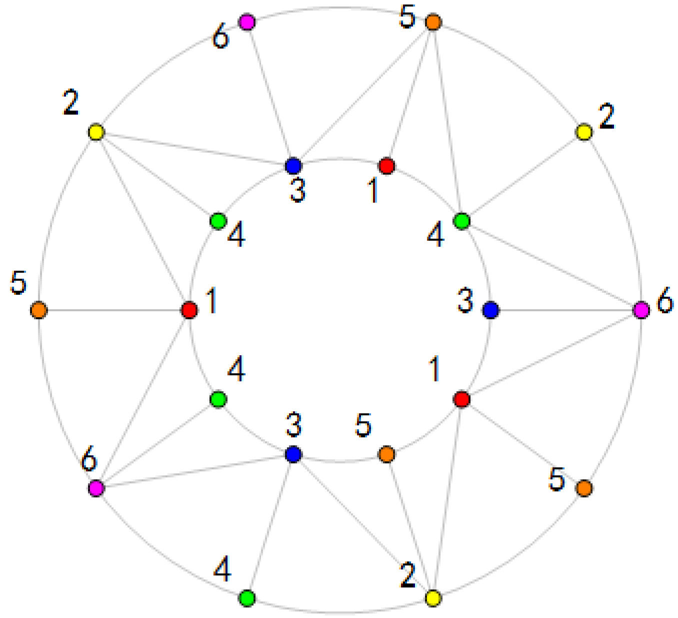
| กราฟ | จำนวน b -โครมาติก | กราฟ | จำนวน b -โครมาติก | กราฟ | จำนวน b -โครมาติก | กราฟ | จำนวน b -โครมาติก | กราฟ | จำนวน b -โครมาติก | กราฟ | จำนวน b -โครมาติก | กราฟ | จำนวน b -โครมาติก | กราฟ | จำนวน b -โครมาติก | กราฟ | จำนวน b -โครมาติก |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_{3,1}$ | 3 | $A_{4,1}$ | 4 | $A_{5,1}$ | 5 | $A_{6,1}$ | 5 | $A_{7,1}$ | 5 | $A_{8,1}$ | 5 | $A_{9,1}$ | 5 | $A_{10,1}$ | 5 | $A_{m,1}$ | 5 |
| $A_{3,2}$ | 6 | $A_{4,2}$ | 6 | $A_{5,2}$ | 6 | $A_{6,2}$ | 6 | $A_{7,2}$ | 6 | $A_{8,2}$ | 6 | $A_{9,2}$ | 6 | $A_{10,2}$ | 6 | $A_{m,2}$ | 6 |
| $A_{3,3}$ | 6 | $A_{4,3}$ | 7 | $A_{5,3}$ | 7 | $A_{6,3}$ | 7 | $A_{7,3}$ | 7 | $A_{8,3}$ | 7 | $A_{9,3}$ | 7 | $A_{10,3}$ | 7 | $A_{m,3}$ | 7 |
| $A_{3,4}$ | 6 | $A_{4,4}$ | 8 | $A_{5,4}$ | 8 | $A_{6,4}$ | 8 | $A_{7,4}$ | 8 | $A_{8,4}$ | 8 | $A_{9,4}$ | 8 | $A_{10,4}$ | 8 | $A_{m,4}$ | 8 |
| ⋮ | ⋮ | $A_{4,5}$ | 8 | $A_{5,5}$ | 9 | $A_{6,5}$ | 9 | $A_{7,5}$ | 9 | $A_{8,5}$ | 9 | $A_{9,5}$ | 9 | $A_{10,5}$ | 9 | $A_{m,5}$ | 9 |
| | | $A_{4,6}$ | 8 | $A_{5,6}$ | 10 | $A_{6,6}$ | 10 | $A_{7,6}$ | 10 | $A_{8,6}$ | 10 | $A_{9,6}$ | 10 | $A_{10,6}$ | 10 | | |
| | | ⋮ | ⋮ | $A_{5,7}$ | 10 | $A_{6,7}$ | 11 | $A_{7,7}$ | 11 | $A_{8,7}$ | 11 | $A_{9,7}$ | 11 | $A_{10,7}$ | 11 | | |
| | | | | $A_{5,8}$ | 10 | $A_{6,8}$ | 12 | $A_{7,8}$ | 12 | $A_{8,8}$ | 12 | $A_{9,8}$ | 12 | $A_{10,8}$ | 12 | | |
| | | | | ⋮ | ⋮ | $A_{6,9}$ | 12 | $A_{7,9}$ | 13 | $A_{8,9}$ | 13 | $A_{9,9}$ | 13 | $A_{10,9}$ | 13 | | |
| | | | | | | $A_{6,10}$ | 12 | $A_{7,10}$ | 14 | $A_{8,10}$ | 14 | $A_{9,10}$ | 14 | $A_{10,10}$ | 14 | | |
| | | | | | | ⋮ | ⋮ | $A_{7,11}$ | 14 | $A_{8,11}$ | 15 | $A_{9,11}$ | 15 | $A_{10,11}$ | 15 | ⋮ | ⋮ |
| | | | | | | | | $A_{7,12}$ | 14 | $A_{8,12}$ | 16 | $A_{9,12}$ | 16 | $A_{10,12}$ | 16 | | |
| | | | | | | | | ⋮ | ⋮ | $A_{8,13}$ | 16 | $A_{9,13}$ | 17 | $A_{10,13}$ | 17 | | |
| | | | | | | | | | | $A_{8,14}$ | 16 | $A_{9,14}$ | 18 | $A_{10,14}$ | 18 | | |
| | | | | | | | | | | ⋮ | ⋮ | $A_{9,15}$ | 18 | $A_{10,15}$ | 19 | | |
| | | | | | | | | | | | | $A_{9,16}$ | 18 | $A_{10,16}$ | 20 | | |
| | | | | | | | | | | | | ⋮ | ⋮ | $A_{10,17}$ | 20 | | |
| | | | | | | | | | | | | | | $A_{10,18}$ | 20 | $A_{m,2m-4}$ | 2m |
| | | | | | | | | | | | | | | ⋮ | ⋮ | $A_{m,2m-3}$ | 2m |
| | | | | | | | | | | | | | | | | $A_{m,2m-2}$ | 2m |
| | | | | | | | | | | | | | | | | ⋮ | ⋮ |



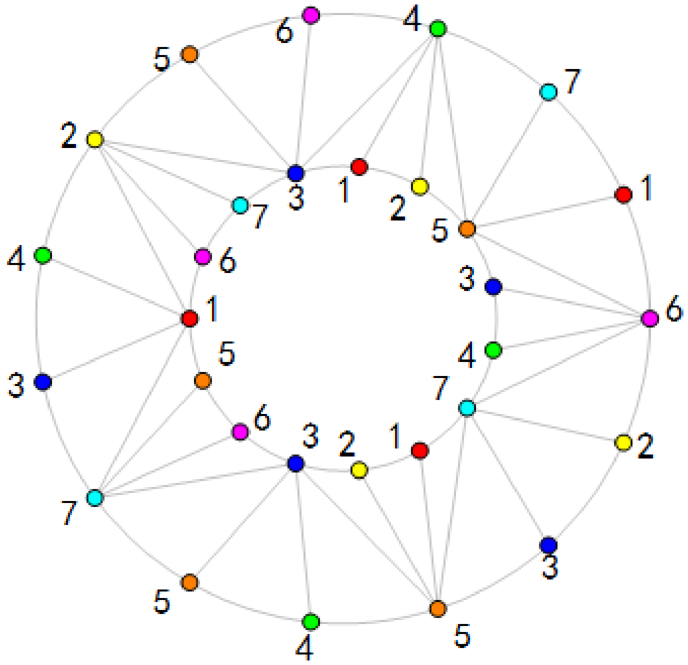

รูป 2.16 ตัวอย่าง 6–คัลเลอร์ริง ที่เป็น $b$ – คัลเลอร์ริงของ $A_{4,2}$



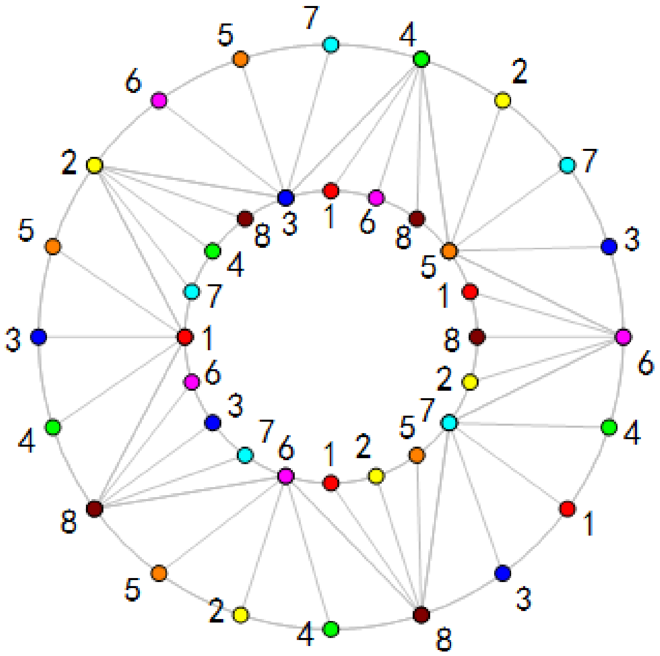

รูป 2.17 ตัวอย่าง 7–คัลเลอร์ริง ที่เป็น $b$ – คัลเลอร์ริงของ $A_{4,3}$



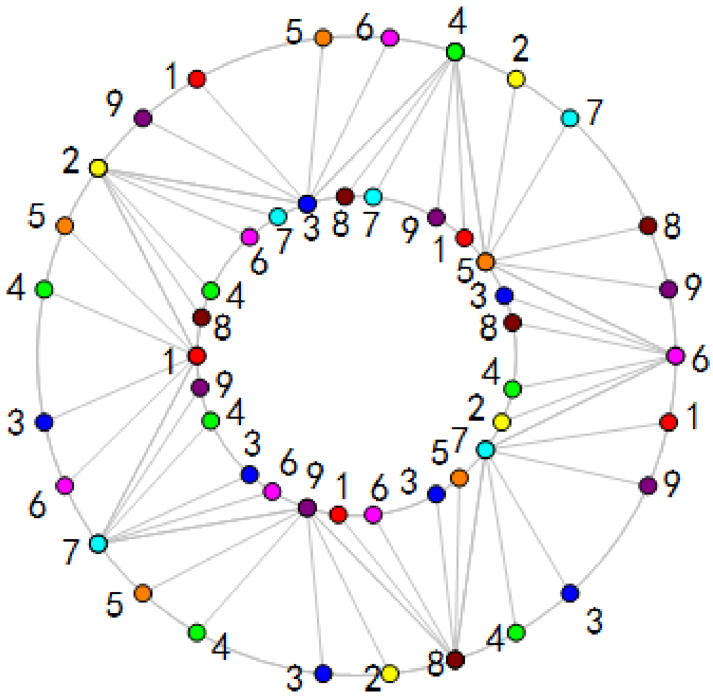

รูป 2.18 ตัวอย่าง 6–คัลเลอร์ริง ที่เป็น $b$ – คัลเลอร์ริงของ $A_{5,2}$




รูป 2.19 ตัวอย่าง 7–คัลเลอร์ริง ที่เป็น $b$ – คัลเลอร์ริงของ $A_{5,3}$



รูป 2.20 ตัวอย่าง 8–คัลเลอร์ริง ที่เป็น $b-$คัลเลอร์ริงของ $A_{5,4}$



รูป 2.21 ตัวอย่าง 9–คัลเลอร์ริง ที่เป็น $b-$คัลเลอร์ริงของ $A_{5,5}$

# บรรณานุกรม

1.นิตยา ชิงชัย, ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น, พิมพ์ครั้งที่ 5, เชียงใหม่: มหาวิทยาลัยเชียงใหม่; 2539

2.S.K. Vaidya and Rakhimol V. Isaac , The $b-$chromatic number of some degree splitting graphs , malayl J.Mat. , 2014 , mar 2(3) 2014 , 249-253.

# ประวัติผู้ศึกษาวิจัย


| | |
|---|---|
| ชื่อ–สกุล | นางสาวปวีณา บุญมาพาด |
| วัน เดือน ปีที่เกิด | 4 กรกฎาคม 2537 |
| ประวัติการศึกษา | ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โรงเรียนหนองกรดพิทยาคม อำเภอบรรพตพิสัย จังหวัดนครสวรรค์ ปีที่จบ 2552<br>ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนหนองกรดพิทยาคม อำเภอบรรพตพิสัย จังหวัดนครสวรรค์ ปีที่จบ 2555 |
| ที่อยู่ปัจจุบัน | 250/2 หมู่ 8 ตำบลหนองกรด อำเภอบรรพตพิสัย จังหวัดนครสวรรค์ 60180 |
| เบอร์ติดต่อ | 094-0985339 |
| อีเมลล์ | Paweena1994@hotmail.com |

# ประวัติผู้ศึกษาวิจัย

| | |
|---|---|
| ชื่อ-สกุล | นายสุทน  ทิมจีน |
| วันเดือนปีเกิด | 27 กันยายน 2537 |
| ประวัติการศึกษา | ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โรงเรียนบ้านวังน้ำขาว<br>อ.บ้านด่านลานหอย จ.สุโขทัย ปีที่จบ 2552<br>ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนบ้านด่านลานหอยวิทยา<br>อ.บ้านด่านลานหอย จ.สุโขทัย ปีที่จบ  2555 |
| ที่อยู่ | 75/1 หมู่ 2 ต.วังน้ำขาว อ.บ้านด่านลานหอย จ.สุโขทัย  64140 |
| เบอร์ติดต่อ | 089-2072317 |
| อีเมลล์ | champlovearsenal@hotmail.com |